14/1/20

1) $A=(a_{ij})$ αντιστρέψιμος ώστε

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} = r \neq 0 \qquad i=1,\dots,n$$

Να δείξετε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του A^{-1} ισούται με $\frac{1}{r}$

$A^{-1}=(b_{ij}) \qquad A^{-1}\cdot A = I = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} a_{tj} \qquad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1 \quad i=1,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} b_{ij} a_{tj} \overset{\text{επιμ.}}{=} \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} \sum_{j=1}^{n} a_{tj} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} r =$$

$$\left(\sum_{t=1}^{n} b_{it}\right) r \quad (++)$$

$$(++),(+++) \Rightarrow \left(\sum_{t=1}^{n} b_{it}\right) r = 1 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n} b_{it} = \frac{1}{r}$$

2) Ένας n πίνακας $A=a_{ij}$ καλείται στοχαστικός αν $a_{ij}\geq 0$ και $\sum_{t=1}^{n} a_{it} = 1$

Να δείξετε ότι το γινόμενο στοχαστικών πινάκων είναι επίσης στοχαστικός.

A,B στοχαστικοί $\Rightarrow$ $A\cdot B$ στοχαστικός

$B\cdot A$ στοχαστικός

$B=(b_{ij})^{*}$, $b_{ij}\geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$

$B\cdot A = C = (c_{ij})$

14/1/20

$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} a_{tj} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum b_{it} a_{tj} =$

$\sum_{t=1}^{n} \sum b_{it} a_{tj} \overset{\text{επιμ}}{=} \sum_{t=1}^{n} b_{it} \sum_{j=1}^{n} a_{tj} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} \cdot 1 = 1$

Θέλατε επίσης $c_{ij} \geq 0$

$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} \underbrace{a_{tj}}_{\geq 0} \geq 0$

3) Έστω ότι τα πολυώνυμα $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}_n[x]$ έχουν κοινή ρίζα. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ δεν αποτελεί βάση του δ.χ. $\mathbb{R}_n[x]$

(έχουν βαθμό από 1 και πάνω)

Έστω ότι ήταν βάση

$1 = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ γρ. συνδ.

$x = a$ η κοινή ρίζα

$1(a) = a_0 \overset{0}{f_0(a)} + a_1 \overset{0}{f_1(a)} + \ldots + a_n \overset{0}{f_n(a)} = 0$

$1 = 0$

4) Έστω V δ.χ. με $\dim V = 2n$ και $T: V \to V$ ενδομορφισμός ώστε για τους ενδομορφισμούς $T - \underset{\text{ταυτοτικός}}{I}$ και $T - 2I : V \to V$

ισχύει ότι

$\dim(T-I)(V) = \dim(T-2I)(V) = n$

Να δείξετε ότι

$V = \ker(T-I) \oplus \ker(T-2I)$

$T - I : V \to V \quad (T-I)(v) = T(v) - v$

$\dim(T-I)(V) = \dim V - \dim\ker(T-I)$

$n = 2n - \dim\ker(T-I) \Rightarrow$

$\dim\ker(T-I) = n$

•

$\dim\ker(T-2I) = n$

14/11/20

$\ker(T-I), \ker(T-2I) \leq V$

$\ker(T-I) + \ker(T-2I)$

$\dim \ker(T-I) + \ker(T-2I)$

$\dim(\ker(T-I) + \ker(T-2I)) = \cancel{\dim \ker(T-I) + \dim \ker(T-2I)}$

$= \underbrace{\dim \ker(T-I)}_{n} + \underbrace{\dim \ker(T-2I)}_{n} - \underbrace{\dim(\ker(T-I) \cap \ker(T-2I))}_{0}$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$\ker(T-I) \cap \ker(T-2I) = \{\bar{0}\}$

Έστω $v \in \ker(T-I) \cap \ker(T-2I) \Rightarrow$

$(T-I)(v) = \bar{0}$ και $(T-2I)(v) = \bar{0}$

$T(v) - v = \bar{0}$ $\quad T(v) - 2v = \bar{0}$

$T(v) = v$ $\quad T(v) = 2v$

$2v = v \Rightarrow v = \bar{0}$

Για ποιες τιμές των a και b ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

έχει rank 1 ή 3 βαθμίδα

rank3 $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ οι γραμμές του είναι γρ. ανεξ.

$$\det A = \det\begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = b \det\begin{pmatrix} 0 & a \\ c & b \end{pmatrix} - c \det\begin{pmatrix} -a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$$

$= b(-ca) + b \cdot ca = 0$

$\forall a,b,c \Rightarrow \operatorname{rank} A < 3$

14/1/20

rankA = 1 ⇔ οι δύο γραμμές είναι γρ. συνδυασμοί της τρίτης

Αν $a=b=c=0 \Rightarrow \text{rank}A=0$

$a^2+b^2+c^2>0$ κάποιο είναι $\neq 0$

Έστω $b\neq 0 \Rightarrow (b,-a,0)$ ή $(0,c,b)$

Θα πρέπει $(c,0,a)=k(b,-a,0)$ και

$(0,c,b)=\lambda(b,-a,0)$

$c=kb$ $0=\lambda b$

$0=ka$ $c=-\lambda a$

$0=a$ $b=0$ Αδύνατο ⇒ Άρα δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το άλλο $(0,c,b)$

$(b,-a,0)=k(0,c,b)$

Για $k=0 \Rightarrow c=a=0$

$k=0 \Rightarrow$ άτοπο

$$A=\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{rank}A=2$$

Για $k\neq 0$

$(c,0,a)=k(b,-a,0)$

$\Leftrightarrow (b,-a,0)=\frac{1}{k}(c,0,a)$ και θα είχαμε άτοπο

Άρα $\text{rank}A=0$ ή 2

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & x \end{pmatrix}$$

για $x=1 \Rightarrow \det A=0$

~~για $x\neq 1$~~

$x \neq 1$

προσθέτω όλες τις στήλες στη πρώτη

$$\det\begin{pmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & 1 \\ & & & \\ x+n-1 & 1 & & x \end{pmatrix}$$

$$= (x+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & x-1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ & & & & \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{pmatrix}$$

$1 = x_i-(x_i-1)$

11/1/20

$$\det\begin{pmatrix} x_1-(x_1-1) & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ x_2-(x_2-1) & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \vdots & & & & \\ x_n-(x_n-1) & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ x_2 & x_2(x_2-1) & & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \vdots & & & \\ x_n & x_n(x_n-1) & & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{pmatrix} -$$

$$\det\begin{pmatrix} x_1-1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ x_2-1 & x_2(x_2-1) & & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \vdots & & & \\ x_n-1 & x_n(x_n-1) & & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{pmatrix} =$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \det\begin{pmatrix} 1 & x_1-1 & & x_1^{n-2}(x_1-1) \\ 1 & x_2-1 & & x_2^{n-2}(x_2-1) \\ & & & \\ 1 & x_n-1 & & x_n^{n-2}(x_n-1) \end{pmatrix} -$$

$$(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ & & & \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde}}$$

$$(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)\cdot(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 - 1 & x_1^{n-2}(x_1 - 1) \\ 1 & x_2 - 1 & x_2^{n-2}(x_2 - 1) \\ \\ 1 & x_n - 1 & x_n^{n-2}(x_n - 1) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow B$

Παρατηρούμε ότι για $x_i = x_j$ και $i \neq j$ τότε αυτή γίνεται 0

Άρα η ορίζουσα διαιρείται απ' το γινόμενο $(x_i - x_j)$ για $i > j$

$$\det B = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

$$\begin{array}{l|c|}
\cline{2-2}
j = 1 & n-1 \\
j = 2 & n-2 \\
\vdots & \\
j = n-1 & 1 \\
\cline{2-2}
\end{array}$$

βαθμός $\dfrac{(n-1)n}{2}$

βαθμός της $\det B$ = βαθμός των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου

$$0 + 1 + 2 + \dots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$